Redberry

Символьные вычисления в физике высоких энергий

Станислав Пославский

Интитут Физики Высоких Энергий
Московский Государственный Университет

24 апреля 2013 г.

Введение

Многие современные вычислительных задачи могут быть решены только с помощью компьютера. При это в большинстве задач приходится иметь дело с тензорами.

- Распространенные системы компьютерной алгебры общего назначения:

  MATHEMATICA, MAPLE, MAXIMA etc.

  ✘ Не поддерживают выражений с индексами
- Специальные пакеты

  CADABRA, REDUCE, FEYNCALC, FORM etc.

  ✘ Не расширяемы

Что меняют индексы?

- Корректность:

$$! \begin{cases} A_\mu + A_{\alpha}, \quad \sin(A_{\alpha}), \quad F^{\mu}_{\mu\mu} \quad \text{etc.} \\ F_{\mu\nu}(A_\alpha + B_{\alpha\mu}{}^{\mu}) = F_{\mu\nu}A_\alpha + F_{\mu\nu}B_{\alpha\mu}{}^{\mu} \end{cases}$$

- Свертки индексов:

$$A^{\mu}{}_{\mu}B^{\alpha}{}_{\beta} \neq A^{\alpha}{}_{\mu}B^{\mu}{}_{\beta}$$

- Типы индексов:

$$T_\mu \in SO(1,3) \text{ но } T_A \in SU(N)$$

- Симметрии тензоров:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

- Много новых специфических трансформаций

Компьютерная алгебра: простейшие задачи

- Установление равенства

$$a + b = b + a$$

- Поиск

$$\left.\begin{array}{c} cd = 1 \\ \Downarrow \\ c(a+b)ed \end{array}\right\} = (a+b)e$$

- Распознавание образов

$$\left.\begin{array}{c} \partial X^n/\partial Y = nX^{n-1}\,\partial X/\partial Y \\ \partial \sin X/\partial Y = \cos X\;\partial X/\partial Y \\ \partial X/\partial X = 1 \\ \Downarrow \\ \partial \sin^2 t/\partial t \end{array}\right\} = 2\cos t \sin t$$

Компьютерная алгебра: преобразования выражений

Базовые преобразования:

- Подстановки
- Раскрытие скобок
- Приведение подобных
- Различные простейшие упрощения

  ...

Алгоритмы сложных преобразований описываются в терминах

1. поиска, распознавания и сравнения
2. приминения элементарных преобразований

Пример: подстановка

Задача: $F_{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\beta\mu} \quad \rightarrow \quad F_{\rho\tau} G^{\mu\tau}$

- Поиск: $F_{\rho\tau} G^{\mu\tau}$
- Сравнение: $F_{\alpha\beta} \rightarrow F_{\rho\tau} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \rightarrow \rho \\ \beta \rightarrow \tau \end{array} \right\}$
- Конфликт: $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\mu}$ и $F_{\rho\tau} G^{\mu\tau} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha \rightarrow \rho \\ \beta \rightarrow \tau \\ \mu \rightarrow \alpha \end{array} \right\}$
- Применяем отображение: $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\mu} \rightarrow R^{\alpha}{}_{\rho\tau\alpha}$
- Заменяем: $F_{\rho\tau} G^{\mu\tau} \rightarrow \underline{R^{\alpha}{}_{\rho\tau\alpha} G^{\mu\tau}}$

Сравнение: более сложный пример

- Задача:

$$\begin{cases} R_{ab}A_c + R_{bc}A_a \sim R_{ij}A_k + R_{jk}A_i, \\ \text{если } R_{ab} = -R_{ba} \end{cases}$$

- Результат:

$$\mathcal{M}_1 = +\left\{ \begin{array}{c} a \to i \\ b \to j \\ c \to k \end{array} \right\} \quad \mathcal{M}_2 = -\left\{ \begin{array}{c} a \to k \\ b \to j \\ c \to i \end{array} \right\}$$

Вывод

Результатом сравнения является отображение индексов со знаком. Таких отображений может существовать несколько

Система компьютерной алгебры Redberry:

- базовый набор инструментов CAS
- полная поддержка символьных выражений с индексами
- высокоуровневый язык программирования

- симметрии тензоров
- LaTeX ввод/вывод
- типы индексов

- расчет диаграмм Фейнмана
- вычисление петлевых интегралов
- etc.

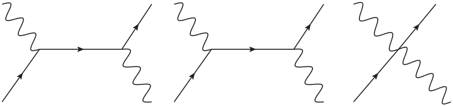
Redberry $\sim$ 100k строк и 1k тестов

Комптоновское рассеяние π мезонов

Вершины: $V_\mu(p_1, p_2) = -ie(p_{1\mu} + p_{2\mu}), \quad V_{\mu\nu} = -ie^2 g_{\mu\nu}$

Пропагатор: $P(k) = -i\dfrac{1}{k^2 - m^2}$

- Диаграммы Фейнмана:



- Матричный элемент:

$$V^\mu(p_1, p_1 + k_1) D(p_1 + k_1) V^\nu(-p_2, -p_1 - k_1) + \\ + V^\nu(p_1, p_1 - k_2) D(p_1 - k_2) V^\mu(-p_1 + k_2, -p_2) + \\ + V^{\mu\nu}$$

Однопетлевое эффективное действие неминимального векторного поля

Действие:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4}(\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\nabla_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2}P^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta\right)$$

Обратный пропагатор:

$$D_\alpha{}^\beta = \left(g^{\mu\nu}\delta^\beta_\alpha - \frac{\lambda}{2}\left(g^{\mu\beta}\delta^\nu_\alpha + g^{\nu\beta}\delta^\mu_\alpha\right)\right)\nabla_\mu\nabla_\nu + P_\alpha{}^\beta + \frac{\lambda}{2}R_\alpha{}^\beta$$

Однопетлевое эффективное действие неминимального векторного поля

Эффективное действие:

$$\Gamma^{(1)}_{\infty} = \frac{1}{16\pi(d-4)} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{120}(-32 + 5\gamma^2 + 10\gamma) R_{\epsilon\mu} R^{\epsilon\mu} \right.$$

$$+ \frac{1}{240} R^2 (28 + 5\gamma^2 + 20\gamma) + \frac{1}{24}(\gamma^2 + 12 + 6\gamma) P_{\beta\alpha} P^{\alpha\beta} +$$

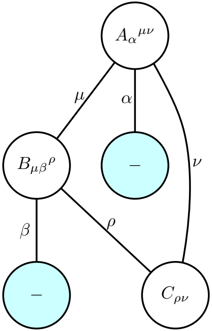
$$\left. + \frac{1}{12}\gamma(4+\gamma) R_{\nu\epsilon} P^{\nu\epsilon} + \frac{1}{24} R(\gamma^2 + 4 + 2\gamma) P \right)$$

Графы: введение

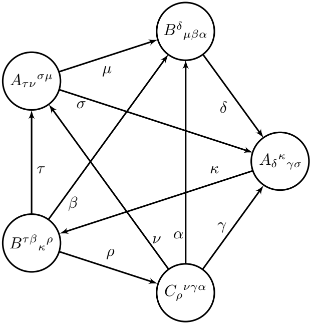
Каждое произведение представляется графом:

- Вершины — множители
- Ребра — свертки индексов
- Свободные индексы свертываются с хвостами

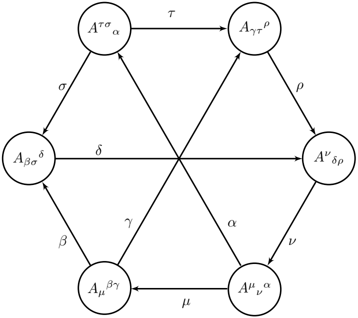
$A_{\alpha}{}^{\mu\nu} B_{\mu}{}^{\beta\rho} C_{\rho\nu}$:



Графы: примеры K_5 и $K_{3,3}$



(a) K_5



(b) $K_{(3,3)}$

(a) $A_{\tau\nu}{}^{\sigma\mu} B^{\delta}{}_{\mu\beta\alpha} A_{\delta}{}^{\kappa}{}_{\gamma\sigma} C_{\rho}{}^{\nu\gamma\alpha} B^{\tau\beta}{}_{\kappa}{}^{\rho}$

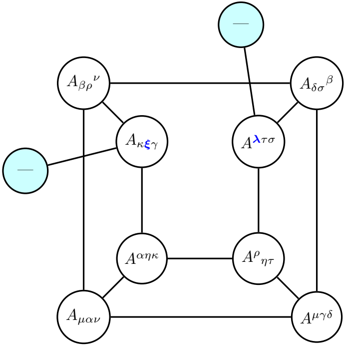
(b) $A_{\beta\sigma}{}^{\delta} A^{\tau\sigma}{}_{\alpha} A_{\gamma\tau}{}^{\rho} A^{\nu}{}_{\delta\rho} A^{\mu}{}_{\nu}{}^{\alpha} A_{\mu}{}^{\beta\gamma}$

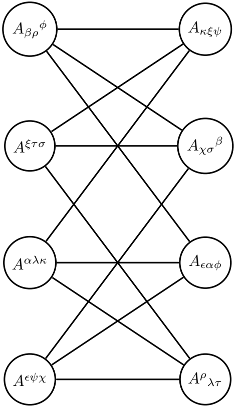
Графы: построение отображений

$$\left.\begin{array}{c} A_{\mu\alpha\nu}A_{\beta\rho}{}^{\nu}A_{\delta\sigma}{}^{\beta}A^{\mu\gamma\delta}A^{\alpha\eta\kappa}A_{\kappa\xi\gamma}A^{\lambda\tau\sigma}A^{\rho}{}_{\eta\tau} \\ \downarrow \\ A_{\epsilon\alpha\phi}A_{\beta\rho}{}^{\phi}A_{\chi\sigma}{}^{\beta}A^{\epsilon\psi\chi}A^{\alpha\lambda\kappa}A_{\kappa\xi\psi}A^{\xi\tau\sigma}A^{\rho}{}_{\lambda\tau} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \xi & \lambda \\ \downarrow & \downarrow \\ \xi & \xi \end{bmatrix}$$

Графы: построение отображений

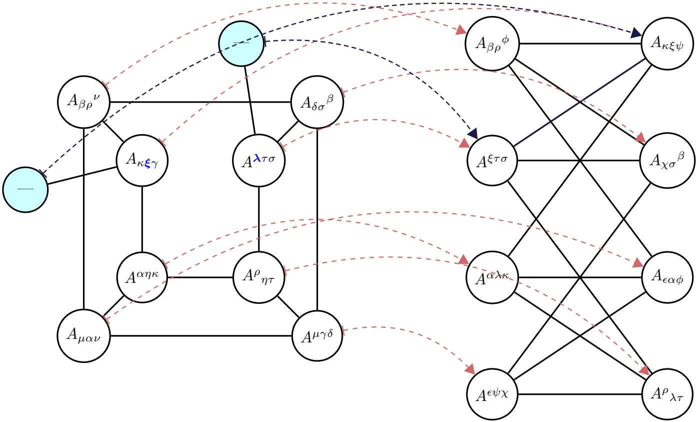
$$\left.\begin{array}{c} A_{\mu\alpha\nu}A_{\beta\rho}{}^{\nu}A_{\delta\sigma}{}^{\beta}A^{\mu\gamma\delta}A^{\alpha\eta\kappa}A_{\kappa{\color{blue}\xi}\gamma}A^{{\color{blue}\lambda}\tau\sigma}A^{\rho}{}_{\eta\tau} \\ \downarrow \\ A_{\epsilon\alpha\phi}A_{\beta\rho}{}^{\phi}A_{\chi\sigma}{}^{\beta}A^{\epsilon\psi\chi}A^{\alpha\lambda\kappa}A_{\kappa\xi\psi}A^{\xi\tau\sigma}A^{\rho}{}_{\lambda\tau} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \xi & \lambda \\ \downarrow & \downarrow \\ \xi & \xi \end{bmatrix}$$





Графы: построение отображений

$$
\left.\begin{array}{c}
A_{\mu\alpha\nu}A_{\beta\rho}{}^{\nu}A_{\delta\sigma}{}^{\beta}A^{\mu\gamma\delta}A^{\alpha\eta\kappa}A_{\kappa\xi\gamma}A^{\lambda\tau\sigma}A^{\rho}{}_{\eta\tau} \\
\downarrow \\
A_{\epsilon\alpha\phi}A_{\beta\rho}{}^{\phi}A_{\chi\sigma}{}^{\beta}A^{\epsilon\psi\chi}A^{\alpha\lambda\kappa}A_{\kappa\xi\psi}A^{\xi\tau\sigma}A^{\rho}{}_{\lambda\tau}
\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \xi & \lambda \\ \downarrow & \downarrow \\ \xi & \xi \end{bmatrix}
$$



Графы: распознавание образов

Задача: распознать один тензор в другом

$$\text{pattern:} \qquad \mathbf{X}^{\alpha\rho} B_{\mu\alpha}{}^{\nu} \mathbf{X}_{\rho}{}^{\mu} \mathbf{Y}_{\nu}$$

$$\downarrow$$

$$\text{target:} \qquad A_{\delta\beta} A_{\sigma}{}^{\nu} A_{\lambda}{}^{\alpha} A^{\mu\rho} A_{\gamma}{}^{\kappa} B^{\sigma\delta}{}_{\kappa} A^{\tau\lambda} A_{\rho\tau} B_{\mu\nu\alpha} A^{\beta\gamma}$$

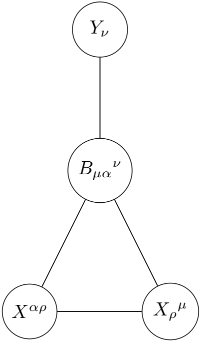
Результат:

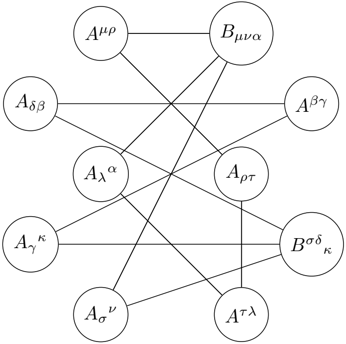
$$\mathbf{X}_{\mu\nu} = A_{\lambda\mu} A_{\nu}{}^{\lambda}$$

$$\mathbf{Y}^{\nu} = A_{\sigma}{}^{\nu} B^{\sigma\delta}{}_{\kappa} A_{\gamma}{}^{\kappa} A_{\delta\beta} A^{\beta\gamma}$$

Графы: распознавание образов

$$\mathbf{X}^{\alpha\rho}B_{\mu\alpha}{}^{\nu}\mathbf{X}_{\rho}{}^{\mu}\mathbf{Y}_{\nu}$$
$$\downarrow$$
$$A_{\delta\beta}A_{\sigma}{}^{\nu}A_{\lambda}{}^{\alpha}A^{\mu\rho}A_{\gamma}{}^{\kappa}B^{\sigma\delta}{}_{\kappa}A^{\tau\lambda}A_{\rho\tau}B_{\mu\nu\alpha}A^{\beta\gamma}$$



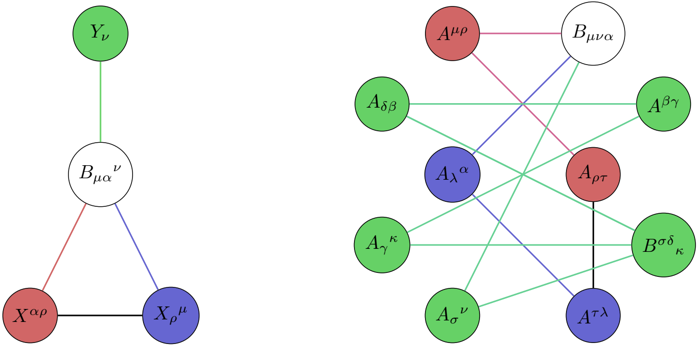


Графы: распознавание образов

$$\mathbf{X}^{\alpha\rho} B_{\mu\alpha}{}^{\nu} \mathbf{X}_{\rho}{}^{\mu} \mathbf{Y}_{\nu}$$

$$\downarrow$$

$$A_{\delta\beta} A_{\sigma}{}^{\nu} A_{\lambda}{}^{\alpha} A^{\mu\rho} A_{\gamma}{}^{\kappa} B^{\sigma\delta}{}_{\kappa} A^{\tau\lambda} A_{\rho\tau} B_{\mu\nu\alpha} A^{\beta\gamma}$$

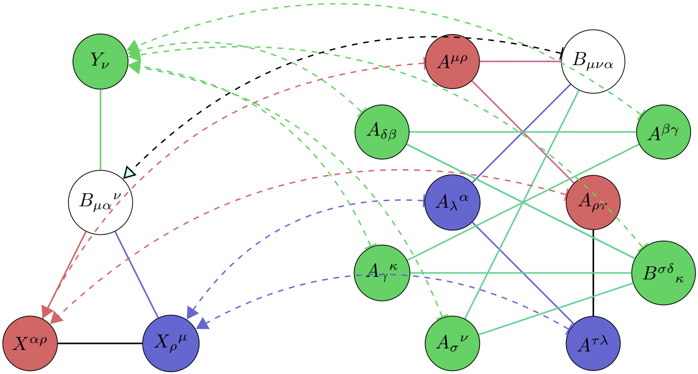


Графы: распознавание образов

$$\mathbf{X}^{\alpha\rho}B_{\mu\alpha}{}^{\nu}\mathbf{X}_{\rho}{}^{\mu}\mathbf{Y}_{\nu}$$

$$\downarrow$$

$$A_{\delta\beta}A_{\sigma}{}^{\nu}A_{\lambda}{}^{\alpha}A^{\mu\rho}A_{\gamma}{}^{\kappa}B^{\sigma\delta}{}_{\kappa}A^{\tau\lambda}A_{\rho\tau}B_{\mu\nu\alpha}A^{\beta\gamma}$$



Графы: следствия

Следствия:

1. Нахождение симметрий эквивалентно поиску автоморфизмов графа
2. Построение отображений индексов эквивалентно поиску изоморфизмов графов
3. Распознавание образов эквивалентно поиску изоморфизмов подграфа

Теория алгоритмов

Любая задача имеет какое-то количество входных данных — n и время решения t

- Класс сложности $\mathcal{P}$ — задачи, для которых $t_{solve} = O\left(n^a\right)$
- Класс сложности $\mathcal{NP}$ —задачи, решение которых можно проверить за $t_{check} = O\left(n^a\right)$
- $\mathcal{NP}$-полные задачи — задачи из класса $\mathcal{NP}$, к которым сводятся все другие задачи из $\mathcal{NP}$

Теория алгоритмов

Любая задача имеет какое-то количество входных данных — n и время решения t

- Класс сложности $\mathcal{P}$ — задачи, для которых $t_{solve} = O\left(n^a\right)$
- Класс сложности $\mathcal{NP}$ —задачи, решение которых можно проверить за $t_{check} = O\left(n^a\right)$
- $\mathcal{NP}$-полные задачи — задачи из класса $\mathcal{NP}$, к которым сводятся все другие задачи из $\mathcal{NP}$

Задача тысячелетия № 1:

Равны ли классы P и NP?

Алгоритмы на графах

- Нахождение симметрий — автоморфизм графа
  - ✔ класс $\mathcal{P}$
  - ✔ Существуют хорошие алгоритмы
- Построение отображений — изоморфизм графов
  - ? $\mathcal{NP}$-полная
  - ✘ Для общего случая лучший алгоритм $O\left(2^{\sqrt{n\log^2 n}}\right)$
- Распознавание образов — изоморфизм подграфа
  - ✔ $\mathcal{NP}$-полная
  - ✘ Не существует даже exp-алгоритма
- Много частных случаев, решаемых за линейное время
  - ✔ Планарные графы, Эйлеровы графы и т.п.

Тензорная CAS

- Проблемы тензорной CAS лежат в области фундаментальных проблем современной математики и теории алгоритмов:

  Задача тысячелетия: *Равны ли классы P и NP?*

- Взаимосвязь графов и тензоров дает новый подход к этим проблемам

  Изоморфизм графов, гипотеза Улама, etc.